22137230

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

**MATEMÁTICAS**
**NIVEL SUPERIOR**
**PRUEBA 3 – ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**

Martes 21 de mayo de 2013 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

*Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.*

**1.** *[Puntuación máxima: 10]*

La variable aleatoria $X$ sigue una distribución normal, de media $\mu$ desconocida y varianza $\sigma^2$ desconocida. Una muestra aleatoria compuesta por 20 observaciones de $X$ arrojó los siguientes resultados:

$$\sum x = 280, \sum x^2 = 3977{,}57$$

(a) Halle una estimación sin sesgo de $\mu$ y de $\sigma^2$. *[3 puntos]*

(b) Determine un intervalo de confianza del 95 % para $\mu$. *[3 puntos]*

(c) Dadas las hipótesis

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 15; \ \mathrm{H}_1 : \mu \neq 15,$$

halle el valor del parámetro $p$ correspondiente a los resultados anteriores e indique una conclusión a un nivel de significación del 1 %. *[4 puntos]*

**2.** *[Puntuación máxima: 12]*

Un equipo de hockey jugó la temporada pasada 60 partidos. El presidente del equipo cree que el número de goles que anota su equipo por partido sigue una distribución de Poisson y crea la siguiente tabla, basada en los resultados de la temporada.

| **Número de goles** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia** | 8 | 9 | 17 | 14 | 7 | 5 |

(a) Indique hipótesis apropiadas para analizar la validez de la suposición del presidente. *[1 punto]*

(b) El presidente decide llevar a cabo un test de $\chi^2$ apropiado para la bondad del ajuste.

(i) Elabore una tabla con frecuencias esperadas apropiadas, aproximadas a **cuatro cifras decimales**.

(ii) Determine el valor de $\chi^2_{calc}$ y el correspondiente valor del parámetro $p$.

(iii) Indique si el análisis que acaba de hacer respalda o no la suposición del presidente. *[11 puntos]*

**3.** *[Puntuación máxima: 9]*

Se puede suponer que el número de averías que hay al día en una fábrica dada sigue una distribución de Poisson de media $\mu$. Sobre la base de la experiencia acumulada, se sabe que el valor de $\mu$ es 1,2. Para tratar de reducir el valor de $\mu$, se instalan nuevas unidades de control en todas las máquinas. Para investigar si esta medida logra o no reducir el valor de $\mu$, se anota el número total de averías, $x$, que se producen a lo largo de un período de 30 días después de la instalación de estas nuevas unidades.

(a) Indique hipótesis apropiadas para esta investigación. *[1 punto]*

(b) Se decide que la región crítica será $x \le 25$.

(i) Calcule el nivel de significación.

(ii) Suponiendo que el valor de $\mu$ se haya reducido realmente a 0,75, determine la probabilidad de un error de tipo II. *[8 puntos]*

**4.** *[Puntuación máxima: 14]*

La variable aleatoria continua $X$ tiene la siguiente función de densidad de probabilidad $f$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+2x}{10}, & \text{para } 1\le x\le 2\\ 0, & \text{resto de los casos.}\end{cases}$$

(a) (i) Determine una expresión para $F(x)$ válida para $1\le x\le 2$, donde $F$ denota la función de distribución acumulada de $X$.

(ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, determine la mediana de $X$. *[6 puntos]*

(b) (i) Enuncie el teorema central del límite.

(ii) De la distribución de $X$ se toma una muestra aleatoria compuesta por 150 observaciones, siendo $\bar{X}$ la media muestral. Utilice el teorema central del límite para hallar, de manera aproximada, la probabilidad de que $\bar{X}$ sea mayor que 1,6. *[8 puntos]*

**5.** *[Puntuación máxima: 15]*

Cuando Ben lanza una flecha, la probabilidad de que dé en la diana es igual a 0,4. Los lanzamientos sucesivos son independientes entre sí.

(a) Halle la probabilidad de que Ben

(i) dé en la diana exactamente 4 veces en sus primeros 8 lanzamientos;

(ii) dé en la diana por 4ª vez en su 8º lanzamiento. *[6 puntos]*

(b) Ben da en la diana por 10ª vez en su $X$-ésimo lanzamiento.

(i) Determine la esperanza matemática de la variable aleatoria $X$.

(ii) Escriba una expresión para $\mathrm{P}(X=x)$ y compruebe que

$$\frac{\mathrm{P}(X=x)}{\mathrm{P}(X=x-1)}=\frac{3(x-1)}{5(x-10)}.$$

(iii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor más probable de $X$. *[9 puntos]*